【論文】（『統計学』第88号 2005年３月）

C. ホイヘンス『運まかせゲームの計算』について

吉田　忠*

要旨

ホイヘンスの『運まかせゲームの計算』を *Ars conjectandi* に再録した J. ベルヌーイは，それまで既知のものから総合的に証明されていたのに命題14は未知要因間の連立方程式の形で解析的に解かれている，と述べた。本稿は，ホイヘンスが各命題をどのような仮定から証明しているかを見た後，この解析をデカルトの分析と対比させる。デカルトの総合と分析は，必要条件を求める幾何学の証明と十分条件を求める作図題の解析と等置されるが，彼の『幾何学』の作図では未知直線を合理的推論だけでなく，既知直線の方程式の構成を通して求めている。しかし連立方程式は十分条件を導き出すわけではない。その変数となる要因を問題の中から探り出す過程を見る，また他変数を補助的に使ってある変数の特定値を求める方法として連立方程式を見る時，それは分析の方法となる。また自然科学の実験や社会科学の実証も含め，分析には合理的推論だけでなく経験，直観，発想が求められる。

キーワード

C. ホイヘンス，チャンスの価格，総合，解析

１．はじめに

クリスティアン・ホイヘンス（Christian Huygens，1629-95，以下ホイヘンス）が，賭け事をめぐるパスカル-フェルマーの往復書簡を基に書いた『運まかせゲームの計算』（*Van Rekeningh in Spelen van Geluck*，1660）は，「運まかせゲーム」に関して基本問題からより複雑な問題へと順に14の命題（問題）を選んで示し，それに解説と解答を与えたものであり，さらにその付録にはより複雑な５つの問題が解説・解答抜きで示されている。これは，確率に関して書かれた初めての著作であっただけでなく，ホイヘンスのライデン大学での恩師であるファン・スホーテン（Frans van Schooten，1615-1661，以下スホーテン）によってラテン語に翻訳され，彼の数学教科書『数学演習』（*Exercitationum Mathematicarum*，1657）に収められたことにより，18世紀に至るまで標準的な確率論のテキストとして各国で広く利用された。この歴史的な著作は，多くの統計学史・確率論史でたびたび取り上げられ，論じられてきた。にもかかわらず改めて取り上げるのは，次のような問題が残されていると思うからである。

ヤコブ・ベルヌーイ（Jakob Bernoulli，1654-1705，以下ベルヌーイ）は確率論の大著『推測法』（*Ars conjectandi*，1713）を書いたが，その第Ｉ部にホイヘンスの著作を再録して命題に別解や注釈を加え，さらに付録の５問に解を与えた。問題は，ベルヌーイが最後の命題14に関し「ホイヘンスは，命題13まで常に純粋に総合的に（synthetisch）解を求めてきたが，この問題で初めてやむをえず解析（Analysis）を使わねばならなかった。これま

* 京都橘女子大学文化政策学部
〒607-8175　京都市山科区大宅山田町34

での問題では，求める期待値はすべて他の既知の期待値から得られた。…それら既知の期待値は，今求めようとしている期待値には依存せずに得られたものである。…しかしこの最終命題では，事情が異なっている。なぜなら，ゲームの順がＢに来たときのＡの期待値は，…Ａに順番がきたときのＡの期待値を知らない限り，得られない。このように両者の期待値が知られていない場合でも，もし解析の方法に依拠すれば…それらを知ることができる。」と述べている点である[1)]。

すなわち，単に基本的なものから複雑なものへと並べられているように見える14個の命題も，ベルヌーイによれば，基本的な問題から総合的に上向したものであるが，最後の命題14に至ってそれは中断され，解析による下向に依存せざるをえなくなった，というわけである。まず，これが確かめられねばならない。さらに，命題13までが純粋に総合で解かれているとしたら，その前提には自明とされる公理が証明なしでおかれているはずである。ホイヘンスはどのようなものを公理とし，どのような根拠でそれを自明としたか。

その上で，ここでの解析が『方法序説』においてデカルトが重視した分析とどのように関連しているかが問われねばならない。ベルヌーイのいう総合と解析の方法は，このデカルトの方法論，とくに幾何学を始めとする数学に適用された場合の方法論とどのように関わるかという問題である。スホーテンはデカルトの知己で彼の『幾何学』のラテン語への訳者であったが，ホイヘンスは，デ・ウィット（de Witt，1625-1672），ヨハネス・フッデ（Johannes Hudde，1628-1704）と共にライデン大学で彼に学んだ。そのスホーテンは，ホイヘンスの小著収録に際しその「はしがき」でこう述べている。この教科書では，代数学によって発見された美しい成果を示してきたが，その方法の拡大のためにホイヘンスの論文を載せる。そこでは私も使ってきた解析の方法が駆使されており，読者にとって大いに有益であろう，と[2)]。

最後にこの問題は，幾何学における総合と解析という方法にも関わっている。ユークリッド流の幾何学がその公理を基礎にした総合の方法をとるのに対し，作図では解析の方法がとられると言われるが，この見地からも上記の問題は検討されねばならない。

以上が，ホイヘンスの小著を改めて取り上げようとする問題意識である。

２．『運まかせゲームの計算』の概要

2.1　ホイヘンスが前提とする仮定

ホイヘンスはその小著の冒頭で，次のように述べる。運まかせゲームでは事前にその勝敗の可能性の大きさを計算することができる。さらにその結果に関して何かを得たり失ったりする場合，ゲームに参入したり離脱したりする時正当に支払うべきあるいは受領すべき金額をこの計算を基に算出することができる。即ち，運まかせゲームで何かを得たり失ったりするチャンスは，それぞれの条件に応じて一定額の価値を持っている。これが「チャンスの価格」（de waerde van kans（蘭），the value of chance（英））である。（これはいわゆる「期待値」にあたるものだが，チャンスの価格は，確率変数と確率とを区別しない未熟な考え方と見る前に，当時は独自の意味を持っていたことに注意せねばならない。）続けて彼は，このチャンスの価格がどう決まるかについて述べる。

人がある運まかせゲームであるものを得たり失ったりするチャンスは，一つの価値を持っている。即ち誰かがこれと同額の価値を持っていれば，公正なゲームによって，上と同じチャンス（同じゲームで同じものを得たり失ったりするチャンス）を入手することができるようなものである。ここで公正なゲームとは，どちらにも不利であることはないようなゲームである。（彼は次のような例を挙げ

る。）ある人が片手に 3 エキュ，他方に 7 エキュを隠し持っており，私はどちらかを選んでそのお金をもらうことができるとする。この提案＝チャンスは，私にとって確実に 5 エキュを手にしていることと同じ価値を持っている。実際，私が 5 エキュを持っていれば，公正なゲームを通して，等しい可能性で 3 エキュか 7 エキュかをもらえるという先のチャンスを入手することができるからである。

以上の叙述は原文を少し意訳したものであるが，一般論の場合でも例示の場合でも傍点部分はいささか理解し難い。ホイヘンスはなぜこれを公理に準ずる仮定としたのであろうか。もちろんヒルベルト流の公理主義数学以前であるから，そこでの仮定は合理的な者にとって証明なしに自明であるものでなければならない。しかしこれは決して自明ではない。

まず「運まかせゲームにおけるチャンスがある価値を持つ」という前段に関してである。それには，中世以降の契約法で「リスクを含む取引での公正な契約」という概念が確立されていたこと，とくに地中海貿易の復活後，「危険の大きさと結果に伴う価値との複合物」に関する取引でも質的合理的な意味で公正な契約がある，という考え方を当時の法律学者はとるようになっていたこと，これらが前提に置かれなければならない。この「公正な価格」を数量化しようとする試みこそ，パスカル＝フェルマーからホイヘンスに至るチャンスの価格の探究であった。だからこそ期待値を分解することなく，チャンスの価格それ自体を求めようとしたのである[3]。この概念を前提にすると，上記傍点部分は次のように理解されるであろう。

ホイヘンスは，公正であることが自明であるゲームでのチャンスの価格から出発する。例えば A，B 両人が X 円ずつを拠出して行う勝敗の可能性が等しいゲームで，勝てば $2X$ 円を得，負ければゼロになるとする。この運まかせゲームは明らかに公正であり，かつそのチャンスの価格は X 円である。そこで自明とされたのは，勝敗の可能性とそれに伴う得失に関してだれが見ても公正なゲームが存在し，それはだれが見ても公正なチャンスの価格を持っているということであった。加えて，それが運まかせゲームとそのチャンスの価格の数学的な展開を最も基礎的なところで人の経験や判断と結びつける原理とされている。次に「所与の運まかせゲームにおけるチャンス」をこの「公正な運まかせゲームにおけるチャンス」に変換することができること，そしてそれによって「後者のチャンスの価格」を基に「前者のチャンスの価格」が導出できること－これが第二の自明な仮定であり，これらの仮定こそ上記の傍点部分の含意であった。ホイヘンスの著作の内容は，この「仮定」と「単純な運まかせゲームの価格」から「より複雑な運まかせゲームの価格」を数学的に導出していくことにあった。まず命題１から見てみよう。

2.2　ホイヘンスによるチャンスの価格の計算

（i）命題 1 では，最も基本的な運まかせゲームに関して上記の仮定を前提にチャンスの価格が求められる。それを原文（蘭）から訳すと，次のようになる。「命題 1．私が a か b かを得る同じチャンスを持っている時，それは私に $(a+b)/2$ の価値がある。」（傍点引用者）ここでホイヘンスは，「チャンス」の語を二つの意味で使っている。前の傍点部分は「同じ大きさの可能性」であり，後の傍点部分は「同じ大きさの可能性で a か b かを得られるチャンス」である[4]。だからこの命題は正確には「私が同じ大きさの可能性で a か b かを得るチャンスを持っている時，私にとってこのチャンスの価格は $(a+b)/2$ である。」となる。これに対するホイヘンスの証明である。「私はこのチャンスの価格を X とおく。そのとき，もし私が X を所持しているとしたら，

公正なゲームによってこれと同じチャンスを新たに入手できるようなものでなければならない。」これに次のような具体化が続く。私と相手が同額の X 円を賭けて公正な運まかせゲームをするとしよう。勝者は掛金全額の $2X$ 円を得るが，そのうちの a 円を敗者に与えるとする。すなわち私も相手も勝てば $(2X-a)$ 円，負ければ a 円を得ることができる。ここで $2X-a$ 円を b 円とおけば，両者とも上記命題１と同じチャンスの価格をもつことになる。そこで $2X-a=b$ とおいて解くと，チャンスの価格 X は，$X=(a+b)/2$ となる。

では先述の仮定は命題１をどのように基礎づけるか。その仮定は，まず「公正な運まかせゲームとそこでの公正なチャンスの価格がある」であり，さらに「所与の運まかせゲームでのチャンスをこの公正な運まかせゲームでのチャンスに変換でき，そして前者のチャンスの価格は後者のチャンスの価格から導出される」というものであった。具体的には，(イ)相互に X 円を出し合って等しい可能性の運まかせゲームに賭けるとき，そこでの公正なチャンスの価格が X 円である。(ロ)この公正な運まかせゲームは，そのチャンスの価格を変えぬまま命題１の運まかせゲームに変換できる。(ハ)所与のゲームのチャンスの価格は，公正な運まかせゲームのそれから得られる[5]。

次の命題２は，「同じ大きさの可能性で a か b か c かを得ることができる時，このチャンスの価格は $(a+b+c)/3$ である」であり，命題３は「同じ大きさの p 個のチャンスで a を得，q 個のチャンスで b を得ることができるとき，このチャンスの価格は $(pa+qb)/(p+q)$ である」である。いずれも命題１に劣らぬ重要な命題である。

命題２の証明は命題１と同じく，先の仮定から直接導出される。私を含む A, B, C が X 円を出し合い，勝者が $3X$ 円を手にするという公正な運まかせゲームで，そのチャンスの価格は X 円だ，ということから出発する。そして勝者がＡのとき $3X$ 円のうちＢに a 円，Ｃに b 円を与え，勝者がＢのときＣに a 円，Ａに b 円を与え，勝者がＣのときはＡに a 円，Ｂに b 円を与えるとする。この新しい運まかせゲームでのチャンスの価格は上の公正な運まかせゲームのそれと同じである。これを命題２の運まかせゲームに等値させ，$3X-a-b$ を c とおくと $X=(a+b+c)/3$ 円となる。

命題３の証明も基本的には同じである。私を含む $(p+q)$ 人が X 円を出し合い，勝者が $(p+q)X$ 円を得るという運まかせゲームのチャンスの価格は X 円である。参加者を p 人と q 人のグループに分け，私は p 人のグループに入る。私を始め p 人のグループに属する者が勝者になった時は，そのグループの者に a 円を，他のグループの者には b 円を与えるとする。私の場合，１個のケースで $\{(pX+qX-(p-1)a-qb)\}$ 円，$p-1$ 個のケースで a 円，q 個のケースで b 円を得る。（これは，p 人のグループに属する者総てに共通する。）これを所与の命題の形に等値させるには，$\{(pX+qX-(p-1)a-qb)\}=a$ とすればよい。これを解くと $X=(pa+qb)/p+q$ となる。

このようにホイヘンスは，公正な運まかせゲームとそこでのチャンスの価格の存在という仮定に基き三つの基本的な命題を導出した。

(ii) 続く命題４－９は，パスカル＝フェルマーの往復書簡で最初に取り上げられた運まかせゲームにおける「配分問題」である。命題４はそこで有名な「甲と乙が勝敗の可能性が等しいゲームを繰り返すとし，先に３勝した方が両者の出した賭金を全部得るという運まかせゲームで，甲が２勝１敗のままゲームを中断する時，両者は賭金をどう配分するのが公正か」という問題である。命題５は「上の問題で甲が２勝０敗で中断する時」の配分問題，命題６は「同じく，甲が１勝０敗で中断する時」の配分問題である。ただし，命題

５は（賭金を得るのに）「甲はあと１勝，乙はあと３勝せねばならぬ時」，命題６は「甲はあと２勝，乙はあと３勝せねばならぬ時」の配分問題とされ，さらに命題７では「甲はあと２勝，乙はあと４勝せねばならぬ時」の配分問題が取り上げられる。命題８は，参加者を甲，乙，丙の３人とし，「甲と乙はあと１勝，丙はあと２勝せねばならぬまま中断した時」の配分問題である。最後の命題９では，問題を一般化してある人数が参加者する運まかせゲームで，各人の必要な勝数がそれぞれある数である時の配分問題が取り上げられている。

まず命題４であるが，賭金の合計を a とすると，次のゲームで甲が勝てば３勝して a を得，負ければ２勝２敗となって半額の $(1/2)a$ を得る。従って命題１により２勝１敗の状態の甲のチャンスの価格は，$\{a+(1/2)a\}/2=(3/4)a$ となる。命題５は，次に乙が勝つと命題４と同じになること，及びそれに命題１を適用することで解くことができる。命題６は同じようにして命題５に還元できることから解ける。また命題７は，それが命題６に還元されること，及び命題５から「甲があと１勝，乙があと４勝せねばならぬ時」が導出されることを用いて解きうる。いずれの場合も，最後には命題１が利用される。命題８は，次のゲームで甲，乙，丙のそれぞれが勝つ場合の甲の取り分を求め，それに命題２を適用すればよい。命題９は，所与の人数のプレイヤーがそれぞれある「勝数不足」を持つ時，より単純なケースに還元して各人のチャンスの価格を求める問題であるが，ホイヘンスはその一般式は与えずに甲，乙，丙の３人の勝数不足数（１，１，２）から出発して（２，３，５）まで不足数が増加する場合のチャンスの価格を順に示すにとどまっている[6]。こうして命題４－９の「配分問題」は，命題１－３に基き演繹的に導出される。

命題10－12は，「ゲームの繰り返し回数の問題」即ちある事象の起きる確率がある大きさ以上になるのに必要な回数を求める問題である。命題10は「サイコロを何回投げると６の目を１度出せるか」，命題11は「２個のサイコロを何回投げると２個の６の目を１度出せるか」，命題12は「何個のサイコロを投げると，１回で２個の６の目を出せるか」であるが，ここで「…を１度出せるか」は「…を少なくとも１回出す確率が１/２より大になるか」という意味である。このようにホイヘンスは常に「ある事象の起きる確率が１/２以上か以下か」を問題にするが，それは，彼が勝敗の可能性の等しいゲームをチャンスの価格計算の基礎においたことと無関係ではないと見てよいであろう[7]。

まず命題10である。現在この問題は，まずサイコロを n 回投げて１回も６の目が出ない確率を求めてそれを１/２より小にする n を求める，という形で解かれるが，ホイヘンスは命題３を用いて次のように解く。まず最初の１回目のサイコロ投げでは，１通りで a を得，５通りでゼロだから，命題３により $(1\times a+5\times 0)/6=a/6$ がそのチャンスの価格になる。２回投げる場合は，最初の投げで６の目が出ると a を得，６以外の目の時は次のサイコロ投げで６の目の出るチャンスの価格 $a/6$ を得ることになるから，２回投げて少なくとも１回６の目が出るチャンスの価格は同じく命題３を用いて $\{1\times a+5\times(a/6)\}/6=(11/36)a$ となる。これを繰り返すと，４回投げるとした時のチャンスの価格が $(671/1296)a$ となり，賭金を得る確率が１/２を越えることになる。命題11も全く同様であるが，違うのは１回サイコロを投げで１通りで a を，35通りでゼロを得る点である。ホイヘンスは面倒な計算を繰り返して，25回繰り返すとしたときに賭金を得る確率が１/２を越えることを示した。

命題12では，２個のサイコロを投げて６のゾロ目で a を得るのは１通り，ゼロの場合は35通りであり，そのチャンスの価格は命題３

から $a/36$ である。3個のサイコロを投げる場合は，最初の1個が6の目の時と6以外の目の時とに分ける。前者のチャンスの価格は命題10によって $(11/36)a$ であり，後者のそれは命題11の1回投げの場合から $a/36$ であり，この場合のチャンスの価格は命題3から $\{(11/36)a+5(1/36)a\}/6=(2/27)a$ となる。ホイヘンスはここまで計算し，あとは同じようにしていけばよいと結んでいるが，ベルヌーイは注釈で必要回数を求める一般式を得意の組合せ論を用いて与えた[8]。

命題13の「2個のサイコロを1回投げて目の和が7の時私の勝ち，10の時は相手の勝ち，それ以外は引き分けで賭金は等分だとする。この時，私の取り分（私のチャンスの価格）を求めよ。」では，6通りで賭金 a を得，3通りでゼロ，27通りで $(1/2)a$ を得るから，命題3より私のチャンスの価格 $=(13/24)a$ が得られる。

(iii) こうして命題13までの解は，仮定と命題1－3を用いて総合的に得られた。問題は命題14である。これは，「私と相手が二つのサイコロ投げを交互に行う運まかせゲームで，相手が先に始めるとし，相手が先に目の和6を出したら相手の勝ち，私が先に目の和7を出したら私の勝ちとする。そこで，相手のチャンスの価格と私のチャンスの価格との比を求めよ。」であるが，ホイヘンスの解は次のようなものである。

まず，私が投げる番での私のチャンスの価格と相手の番での私のチャンスの価格とを区別する。ゲーム開始時の私のチャンスの価格は相手の番でのそれと同じであるが，これを X とする。また私の番での私のチャンスの価格を Y，得る掛金を a とする。相手の番の時，5通りで相手が勝ち31通りで私に順番が回ってくるから，$X=(5\times0+31Y)/36=(31/36)Y$ という関係が得られる。私の番では6通りで a を得，30通りで相手に順番が回っていく。従って，$Y=(6a+30X)/36$ である。

$$X=(31/36)Y$$
$$Y=(6a+30X)/36$$

この連立方程式を解き，所与のゲームでの私のチャンスの価格 X を求めると $X=(31/61)a$ となる。そこでの相手のチャンスの価格は $a-X=(30/61)a$ となり，従って私と相手とのチャンスの価格の比は31：30となる。

既述のようにベルヌーイは命題14で「初めてやむをえず解析を使わねばならなかった」と述べたが，それは，ゲーム開始時の私のチャンスの価格 X と私の番での私のチャンスの価格 Y との相互依存関係を表す連立方程式を解いて目的の X を求める方法であった。実はこの方法は，ホイヘンスの付録5問の解にも適用される。

例えば付録問題1「AとBが次の条件で2個のサイコロを投げる。Aが目の和6を，Bが7を先に出したら勝ちとし，まず先にAが1回投げた後，Bが2回投げ，続けてAが2回投げる。以下，どちらかが勝つ迄交互に2回ずつ投げるとする。この時，AとBとでのチャンスの価格の比を求めよ。」である。この問題は，哲学者スピノザによって1660年代半ばに取り上げられた[9]。19世紀後半に発見された彼の小著“Reeckening van Kanssen”(『チャンスの計算』)では，まずホイヘンスの付録5問が列挙された後，その第1問が取り上げられている。そしてデカルト『方法序説』第2部の方法原則第2「問題を分割せよ」を適用して，問題1を，同じ勝ち負け条件のもとで「Bから始め，BとAが2回ずつ交互に投げる場合」と「最初にAが1回，次のBからは2回ずつ交互に投げる場合」との二つに分割する，とした。前者は，2個のサイコロを2回ずつ投げる点と先手後手の間で勝つ目の和が逆である点とを除けば命題14と同一であり，後者は問題1そのものである。だからスピノザは，問題を分割したというよりも所与の問題に新たな問題を前置しただけである。

まず前者に関して，ゲーム開始時のAの

チャンスの価格を X，A の番での A のチャンスの価格を Y とすると，命題14と同様にして次の両式が得られる。

$X=(25/36)Y$

$Y=(335/1296)a+(961/1296)X$

両式を解いて，$X=(8375/22631)a$ が得られる。次に後者である。これは，前者の前に「A が 1 回投げる」が加わったゲームである。だから A は，5 通りで勝って a を得，31通りで X を得る。これに命題 3 を適用すると，A のチャンスの価格は $\{5a+31\times(8375/22631)a\}/36=(10355/22631)a$ となり，チャンスの価格の比は10355：12276となる。

以上が付録問題 1 のスピノザによる解法であるが，見ての通り命題14でのホイヘンスの方法と基本的に同じである。なお，ベルヌーイはこの問題にスピノザと異なる方法で解を与えているが，その方法は同じく連立方程式を解くものであった。だから以下，ベルヌーイが解析と呼んだ方法をこのようなものとして捉え，デカルトの分析と比較しながらその検討を進めたい。なお，問題 1 を含めて付録の 5 問にはその他にも論ずべき点が多々あるが，その検討は稿を改めて行う。

3．ホイヘンスにおける解析とデカルトの分析

3.1　デカルトにおける分析と総合

ベルヌーイがホイヘンスの方法に関して総合的と解析的とを区別した時，それはデカルトにおける分析と総合の方法を前提にしていたと考えられる。周知のようにデカルトはその方法を，幾何学の方法に古代の解析と（それを含む）中世以降の代数との方法を対峙させながら提示した。この点は，『精神指導の規則』の規則第 5，第 6，第 7 だけでなく，スピノザも引用した『方法序説』第 2 部における「四つの方法原則」においてもまた『省察』の第 2 反論への答弁での「二重の証明の方法」でも同じように見られる[10]。

しかしそこでの分析と総合の定義は，発見の論理と証明の論理という学問一般の方法論から離れて数学の問題を解く方法として見ようとすると，必ずしも明解なものではない。『方法序説』の第 2，第 3 原則は命題を論理的に分解，再構成する際の手続きの一般的説明にとどまるように見え，また『省察』の第 2 反論への答弁においても，分析と総合の語が明示的に使われているにもかかわらず，その定義は曖昧である。最後の『精神指導の規則』では，複雑な命題を単純なものに還元するに際し帰納や枚挙の語が使われているが具体的ではない。いずれにしても，数学の方法として有効であるとは言いがたい。

しかし，このデカルトの分析と総合を数学の方法に引きつけて捉えた人もいた。その一人は野田又夫氏である。野田氏はその名著『デカルト』で述べる[11]。デカルトは，方法のモデルを当時の論理学よりは数学に，しかも「定義と公理から出発して諸定理を証明する」ユークリッド幾何学にではなく，「未知の命題を発見する方法形式」としての「作図題の解を発見するときの手続き，…幾何学で『解析』と呼ばれる手続き」に求めた。「解析」は，「『証明』とは逆のやり方であって，図形がすでに与えられたと仮定して，それの条件にさかのぼって行き，すでに知られた条件に達する（すでに知られている作図法に達する）ことである。」所与の定理を，定義と公理及び既に証明された定理に基いて演繹的に証明する方法が証明＝総合，所与の作図題が描けたとし，それから，それを基に上記作図が可能となるようなより簡単な図形を探し出す方法が分析＝解析だとしたのである。

幾何学の作図は普通，ｉ）それから所与の図形が作図できるより簡単な図形を見出す解析，ii）所与の図形を具体的に描く手続きとしてのアルゴリズム，iii）より簡単な図形から所与の図形を論理的に導く過程を示す証明，iv）これ以外に解のないことを示す吟味に分

けられる[12]。上記の作図題の解はこのうちの解析にあたる。

これと同じ方法論を明示的に示している幾何学のテキストに，佐々木重夫『幾何入門』(岩波全書)がある[13]。佐々木氏は，幾何学の方法を「総合的方法」と「解析的方法」とに分けた。P がこれから証明すべき命題，A_i は公理体系，B_j は P に関する仮説，C_k，D_l は A_i，B_j(及び既に証明されている C_k'，D_l')に基いて証明される命題とし，下図のように，A_i，B_j から P までそれぞれの命題が真であることを順次証明していくのが総合的方法である。佐々木氏によれば「公理 A_1，A_2，…と仮説 B_1，B_2…から次々と必要条件の系列を作って P に達する証明法である…。」これに対し，P から出発し「P なるための十分条件であるような D_1，D_2 を見つける」，さらに十分条件を求めて折線を左にたどり，公理 A_i，仮説 B_j もしくは既に真と証明されている定理 C_k に達するまでそれを続ける。これが解析的方法であり，両者の違いは必要条件を求めていくか十分条件を求めていくかにある，とした。

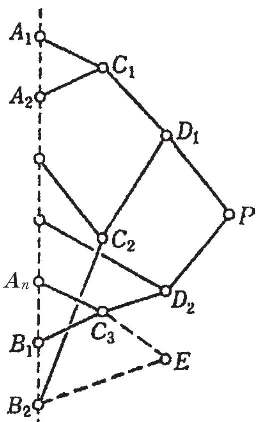

図1　総合的方法と解析的方法
(A_i，B_j→P＝総合的方法，P→A_i，B_j＝解析的方法)

この解析的方法が適用される問題が作図の解析である。右上図で，作図題を満たす図形を F とし，まず「F を，…(作図可能でそれから F が作図できるような)E_1, E_2 に分解する。…E_1，E_2 についても同様なことを行う。」最後に F を構成している点，直線，円等を，即ち作図の公準である基本作図を表すような A_1，A_2，…，A_n に達する。こうした分解過程が解析，そして実際に作図を行った後，画かれた図形が作図題の条件を正しく充たしているかどうかを基本作図を基に証明していく過程が総合である。

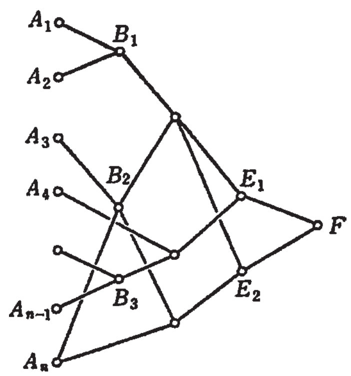

図2　作図の過程（F→A_i）

これが佐々木氏の示す幾何学での総合と解析である。一方，デカルトは彼の分析と総合を数学でどのように使っているのだろうか。それを『方法序説』の「本論」である『幾何学』に具体的に見てみよう[14]。

3.2　デカルト『幾何学』における解析的方法

『幾何学』は，第1巻「円と直線だけを用いて作図しうる問題」で2次方程式の解の作図等を扱った後にパップスの問題を取り上げ，それを梃に，円錐曲線から始まる第2巻「曲線の性質」へ移り，各種の曲線を取り上げる。最後の第3巻では3次元以上の方程式の根の作図等が扱われている。デカルトの「普遍数学」である解析幾何学の本格的展開は第2，3巻であるが，その方法論の基本は第1巻の例題でも見ることができる。

第1巻は，所与の直線の積，商，平方根の作図から始まり，2次方程式の根の作図に進

む。文字通り作図の問題であるが，デカルトがどのように解いたかを先の佐々木氏の方法論と突き合わせながら見てみよう。ここでは所与の直線の平方根の作図と２次方程式 $z^2-az-b^2=0$ の根の作図とを取り上げる。

デカルトは，直線 GH $(=a)$ の平方根に関して図３のように，GH に「(長さ１の) FG を加え，FH を点 K で二等分して，K を中心とする円 FIH を画き，点 G から FH と直角に直線を I まで立てる。GI は求める根である。」と述べる。また，２次方程式の根に関しては，図４を基に述べる。「直角三角形 NLM を作って，辺 LM を既知量 b^2 の平方根 b に等しく，他の辺 LN を $(1/2)a$…にする。次に，この三角形の斜辺 MN を O まで延長して，NO が NL に等しくなるようにすれば，全体 OM が求める線 z である。」

［平方根の抽出］

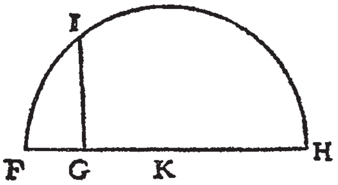

図３　平方根の作図

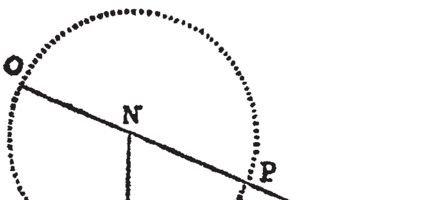

図４　２次方程式の根の作図

まず平方根の作図で解析の方法はどう使われているか。G に垂線 $GI=b$ が描けたとしてこれと $GH=a$ との関係が得られればよいわけだが，$b=\sqrt{a}$ であるから直角三角形を構成しピタゴラスの定理を適用すればよいことに気づく。円 KFH と G での垂線との交点を I として $\triangle IGK$ で $IK^2=GI^2+KG^2$，即ち $\{(1+a)/2\}^2=b^2+\{(1+a)/2-1\}^2$ が成立するが，これから $b=\sqrt{a}$ が得られる。ここで，垂線 GI と $\triangle IGK$ から必要条件たる $b=\sqrt{a}$ を導くのは総合であり，$b=\sqrt{a}$ から十分条件たる垂線 GI と $\triangle IGK$ とを導くのが解析であるが，そこでその十分条件はどのように捉えられたのだろうか。しかし，その手続きは示されていない。

２次方程式 $z^2-az-b^2=0$ の解である。与式は，$(z-a/2)^2=a^2/4+b^2$ となるから，ここでも直角三角形を構成してピタゴラスの定理を適用すればよい。しかし定数 a, b を表す２本の直線を基に，十分条件としての $\triangle NLM$ $(LN=a/2, LM=b)$ を導出する手続きはここでも示されていない。だからデカルトは，十分条件を導出する過程を論理的な推論にではなく発想と直観に委ねているように見える。得られたものが十分条件であることは，証明の過程を通して結果的に明らかになるだけである。

3.3　解析における連立方程式

(i)『幾何学』の方法と方程式

このように，『幾何学』での作図題からより簡単な図形を導く方法は，必ずしも純粋な推論だけに依拠しているようには見えない。この点に関しデカルトは，商・積・平方根の作図の後に「問題を解くに役立つ等式にどのようにして到達すべきか」を書いている[15)]。ある問題を解く時，「まず，それがすでに解かれたものと見なし，未知の線もそれ以外の線も含めて，問題を作図するに必要と思われるすべての線に名を与えるべきである。次に，これら既知の線と未知の線の間に何の区別も設けずに，それらがどのように相互に依存しているかを最も自然に示すような順序に従って難点を調べあげて，或る同一の量をふたつの仕

方であらわす手段を見いだすようにすべきである。この最後のものは等式と呼ばれる。…そして，仮定した未知の線と同じ数だけ，このような等式を見いだすべきである。」それができずにいくつかの未知の線が残るとすれば，残った等式や未知，既知の線を「別々に考察したり，互いに比較したりしながら，…それらを整理して，ただひとつの線だけが残るようにせねばならない。…（そしてそれが）既知の線に等しいか，または，その平方，立法…などが，2個またはそれ以上の他の量の加法か減法によって生ずるものに等しいのである。」最後の部分は，未知の線を z，既知の線を a，b，c として，$z=b$，$z^2=-az+b^2$，$z^3=+az^2+b^2z-c^3$ という関係が得られる，という意味である。

これをより簡単な図形を導く推論過程として見ると依然不十分さが残されているが，問題は傍点部分である。これは，複数の未知の直線に関してそれと同数の等式＝方程式を構成せよ，という意味に理解できる。事実，平方根の場合は未知の直線 b を既知の直線 a で表す式，また2次方程式の場合は未知の量 z を既知の量 a，b で表す式をいずれもピタゴラスの定理の適用の形で示して，作図題をより簡単な図形に還元した十分条件としている。

これは，所与の複雑な問題の中にそれを構成する基本要因を求めようとする時，未知の基本要因に関する（連立）方程式を構成しそれを解くことで基本要因を捉えうるという方法の提示と見ることができる。既に見たように，ベルヌーイがホイヘンスの命題14で解析と呼んだ方法も，複数のチャンスの価格に関して連立方程式の関係を求めてそれを解くものであった。この問題に戻って検討を加えることにしたい。

(ii)　ホイヘンスの解析と連立方程式

命題14では，相手の番での私のチャンスの価格 X，私の番でのそれ Y との間に

$$X=(31/36)Y \tag{1}$$

$$Y=(6a+30X)/36 \tag{2}$$

という連立方程式の関係を導出し，それを解くことで X，Y の値を求めた。ここでの解析の過程は，(i)命題14が与えられた時，それを構成する要因としての X，Y を如何に見出すか，(ii)その X，Y に関する(1)，(2)式を如何に導出するか，(iii)両式を解くことは解析としてどのような意味を持つか，の三つの問題に分けられるであろう。

まず X と Y という要因の検出である。ホイヘンスのチャンスの価格という概念は，中世契約法の「リスクを含む取引での公正な価格」を基礎に，現実の運まかせゲームに関する（経験や直観を含む）推論から導いた公正な運まかせゲームとそこでの公正なチャンスの価格いう仮定に基いている。この手続きは数学的な推論ではなく『方法序説』の方法原則第2に係わるような方法であると言えよう。そしてこの量的概念が確定された時，上記の仮定と命題1－3等を前提に，(1)と(2)のそれぞれの式が導かれた。

重要なことは，(1)，(2)式を別々にとれば，いずれも命題14以前の各命題と同じく総合的に導出されることである。ベルヌーイが「ここで初めて解析が必要になった」という意味は，両式とも未知数 X，Y を含んでいて(1)，(2)のどちらかの式だけからは X，Y は求められず，両者を連立方程式として解かざるをえない，という意味に理解すべきであろう。問題は，連立方程式を解くという手続きの意味である。

(1)，(2)式を解くと，$X=(31/61)a$，$Y=(36/61)a$ の解が得られるが，この時，「式(1)，(2)が成立する」と「$X=(31/61)a$，$Y=(36/61)a$ である」とは必要十分条件の関係にある。前者にとって後者は前者の外延をより狭く規定するものとしての十分条件ではなく，従って連立方程式の解を解析の結果得られたものとすることはできない。

では，命題14の方法を解析と見なすベルヌーイのコメントをどう理解すべきであろうか。この命題を解く時のホイヘンスは，相手の番での私のチャンスの価格 X を求めることに主眼をおいており，私の番での私のチャンスの価格 Y は補助的に扱われている。前者はこのゲームでの私のチャンスの価格そのものであるから，これは当然であろうが，連立方程式にもかかわらず片方の解 Y の値は求めていない。そこで次のように考えられるであろう。

命題14の課題は，運まかせゲームでの私のチャンスの価格を変数 X とし，所与の条件のもとで変数 X がとる特定の値 X_0 を求めることである。しかし，それを既知の a，b，c…等から $X_0=f(a, b, c,\cdots)$ として得ることはできず，他の変数 Y との関数関係 $X=g(Y)$ が知られているだけである。これが(1)式であるが，これだけから X_0 を得ることはできない。そこでゲームに関する条件を検討し，X と Y に関するもう一つの関数関係 $X=h(Y)$ を導出する。これが(2)式である。そしてこの連立方程式を解いて求める X_0 の値を得る。

方法論的に見て，連立方程式を解くことそのものは解析ではない。しかし，命題14の具体的な内容を同時に考慮に入れて見ていく時，所与の問題からそれを構成する要因を検出する手続きには，数学的な推論としての解析の枠には入り切らない分析の過程を見ることができる。また X と Y に関する連立方程式を作って解くという方法も，Y を補助的なものと扱いながら特定要因 X の値を求める方法としてそれを見る時，分析の方法とみなすことができるであろう。

4．結び

ベルヌーイは命題14で，このゲームの私のチャンスの価格 X はそれまでの命題から直接導き出せないこと，導き出せるのはこの X と私の番での私のチャンスの価格 Y との関連だけであって，X は両者の関連を解きほぐすことで求めるほかはないこと，等からその方法を解析とよんだ。しかし X と Y の連立方程式を解くことそれ自体を解析の手続きと見ることはできない。X と Y とが導出された過程にまで視野を広げ，さらに連立方程式を解く過程を片方の X を得る手続きと見なすことで，そこでの方法を分析と見ることが可能になる，と考えられる。これは，数学的な推論形式の一つである解析だけでなく事物的内容的に捉える諸方法で問題に迫っていこうとするものであり，そこに一般的な方法としての分析が見られるようになるのである。

この一般的方法としての分析では，合理的推論だけでなく経験的判断，直観や発想といった主体的要素も重要な役割を果たしている。解析によって十分条件を求めていこうとする場合はもちろんであるが，総合的方法の代表である平面幾何の証明問題を解く場合でも，そこで経験的知識や直観や，発想の果たす役割は大きい[16]。だから対象が自然科学における実験，社会科学における実証にまで広げられた時は，分析の過程はより複雑なものになるであろう[17]。それを数学一般における解析の方法と対比検討することは，本稿が今後に残す課題である。

注

1）Bernoulli, J.（1975），pp.107-151。本稿では，独訳 Bernoulli, J.（1899），邦訳 Bernoulli, J.（1981），及び C. Huygens.（1888）に収録されているホイヘンスのオランダ語原文とその仏訳を参照した。なお，ホイヘンス確率論の優れた先行研究として長岡一夫（1982）があるが，本稿で取り上

げた課題は検討されていない。

2）F. van Schooten, “Tot den Leser” of *MATHEMATISCHE OEFFENINGEN*, in C. Huygens. (1888).

3）チャンスの価格と中世以来の契約法の公正概念との関係は，Daston, J.(1988)，Chap. 1， 2に詳しい。

4）Bernoulli, J.（1975）に付された編者Van der Waerdenによる“Historische Einleitunng”参照（ditto p.10)。なお，以下のホイヘンスの著書からの引用は（注）1)の諸文献に基づいた吉田の訳による。

5）ホイヘンスにおける仮定と命題Iとの関連については，既にダストンがふれている（Daston, J.(1988)，pp.24-26)。それは以下のように要約できる。

期待値を参加料とするゲームが公正であるとする後世の確率論者たちは，まず公正なゲームがあることを前提にそのゲームの期待値を導出しようとするホイヘンスの方法は循環論だとするであろうが，ホイヘンスにとって公正なゲームは非数学的概念として直観的に自明だったのである。その背後には中世以来の公正な(リスクを含む)契約という考え方があった。そして彼は，運まかせゲームに関して「総ての参加者に対し完全に対称的な条件（completely symmetric conditions)」を作り出せたら，それが公正であることは自明だと考えた。また，公正ないくつかのゲームを組合せる（arranging a series of deals）ことで，ある期待値を他の期待値に転換（convert）できると主張した。

本稿での論旨は，基本的な部分でこのダストンの見解に依拠している。しかし筆者は，ホイヘンスが公正な運まかせゲームの自明性の根拠を論理的な対称性にだけでなく，経験と直観を含む合理的推論に置いていた，また公正なゲームの組合せによって期待値を変換しようとしたのではなく，「ある基準となる公正なゲームを所与のゲームに変換する」ことでそのチャンスの価格を知ろうとしていた，と考えている。

6）参加者をA，B，Cの3人に限った命題9の一般解は，各人の勝数不足数を(k, l, m)，Aのチャンスの価格を$f(k, l, m)$，掛金をaとした時，

$$f(k, l, m)=1/3\{f(k-1, l, m)+f(k, l-1, m)+f(k, l, m-1)\}$$

$$f(1, 1, 2)=1/3\{f(0, 1, 2)+f(1, 0, 2)+f(1, 1, 1)\}=1/3(a+0+a/3)=(4/9)a$$

という偏差分方程式を解くことで得られる。Bernoulli, J.（1981)，p.16の訳者注，及び安藤洋美（1992)，p.35参照。

7）1669年8月から11月にかけて，C. ホイヘンスは弟のローデウェク・ホイヘンス（以下，L. ホイヘンス）との間で，グラント『死亡表に関する自然的および政治的諸観察』における生命表をめぐって書簡を交換し，論争した。そこでは，『諸観察』での生命表に先に関心を持ったL. ホイヘンスがそれから平均余命を計算して兄に示したのに対し，C. ホイヘンスはある年齢の人々の余命の「平均」＝平均余命ではなく，その「中位数」となる年齢（それまでに死ぬ可能性とそれ以上生きのびる可能性が等しい年齢）の方がより重要だと主張した。吉田忠（1999)，参照。

8）ベルヌーイは，まず，P_1で勝ちP_2で負けるゲームをn回行い，そこで少なくとも$m-1$回勝つ確率を，組合せ論によって次のように表した。

$$P_1^n+{}_nC_1P_1^{n-1}P_2+\cdots+{}_nC_{m-1}P_1^{n-m+1}P_2^{m-1}$$

そして命題12を少なくとも2回以上勝てばAの勝利とするゲームに置き換え，そこで次のようにAが勝利する確率が1/2以上となるnを求めればよい，とした。

$$(1/6)^n+{}_nC_1(1/6)^{n-1}(5/6)+\cdots+{}_nC_{n-2}(1/6)^2(5/6)^{n-2}\geqq 1/2$$

Bernoulli, J.（1975)，pp.131-33，及びBernoulli, J.（1981)，pp.34-36，特にそこでのBの期待値の表を参照のこと。

9）Spinoza, B. de.（1972)，pp.360-362。また，この小論に関してその数奇な運命を詳述し，さらに原文と英訳を対比しながら解説・検討したたものに，Petry, M.J.(1985)がある。なお，吉田忠(1989)を参照のこと。スピノザのこの小論文は，それが発見された経緯から贋作視されることがあったが，近年，贋作説が再燃し論争が行われている。例えば，de Vet, J.J.V.M.(1983)，Klever, W.N.A.(1983)等参照。なお，ホイヘンスの付録第1問のベルヌーイによる別解については，上記吉田（1989）参照。

10）デカルト（1965），デカルト（1973-１），デカルト（1973-２）。例としてデカルト（1973-２）における「分析」の定義をあげる。「分析は，事物（もの）が方法的に，そしていわばア・プリオリに見つけ出された，その真の途を示すものであって，かくてはつまり，読者がこの途にしたがい，しかも（その含むところの）すべてに十分に注意する，ようにしたいと思うとするならば，この事物（もの）を彼は，自分自身で見つけ出したという場合に劣ることなく完全に知解し自分のものとするでしょう。」

11）野田又夫（1966），64-65頁。

12）一松　信（2003），28-29頁。

13）佐々木重夫（1955），85-86頁，197頁。

14）デカルト（1973-３）。

15）同上，５-６頁。傍点は引用者による。

16）例えば，小平邦彦（2000），アダマール，J.（1990），等参照。

17）社会科学の方法で分析の意義を最も重視した一人が見田石介である。見田石介（1977）参照。しかし分析の手続きとしては「合理的な推論」が挙げられるのみである。

参考文献

[１] アダマール，J.（1990），伏見康治他訳『数学における発明の心理』，みすず書房，1990年.

[２] 安藤洋美（1992），『確率論の生い立ち』，現代数学社，1992年.

[３] Bernoulli, J. (1975), *Ars conjectandi*, in “*Die Werke von Jakob Bernoulli*” Bd III, Basel, 1975.

[４] Bernoull, J. (1899), ubersetzt von R. Haussner, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Leipzig, 1899.

[５] Bernoull, J.（1981），長岡一夫訳『サイコロ遊びにおける計算について』*Bibliotheca Mathematica Statisticum*，26号，ALZAHR 学会，1981年.

[６] Daston, J. (1988), *Classical Probability in the Enlightenment*, Princeton U.P, 1988.

[７] デカルト（1965），山本信訳『精神指導の規則』，『世界の大思想』７，河出書房新社，1965年.

[８] デカルト（1973-１），三宅・小池訳『方法序説』，『デカルト著作集』Ⅰ，白水社，1973年.

[９] デカルト（1973-２），所雄章訳『省察および反論と答弁』，『デカルト著作集』II，白水社，1973年.

[10] デカルト（1973-３），原亨吉訳『幾何学』，『デカルト著作集』Ⅰ，白水社，1973年.

[11] de Vet, J.J.V.M. (1983), Was Spinoza de Auteur van Stelkonstige Reeckening van den Regenboog en Reeckening van Kanssen? *Tijdschrift voor Filosofie* 45, 1983.

[12] 一松　信（2003），『現代に活かす初等幾何学入門』，岩波書店，2003年.

[13] Huygens, C. (1888), *Oeuvres Completes de C. Huygens*, ’s-Gravenhage, 1888-1950.

[14] 小平邦彦（2000），『怠け数学者の記』，岩波現代文庫，2000年.

[15] Klever, W.N.A. (1983), Nieuwe argumenten tegen de toeschrijving van het auteurschap van de SRR en RK aan Spinoza, *Tijdschrift voor Filosofie* 47, 1983.

[16] 見田石介（1977），『見田石介著作集』第４巻，大月書店，1977年.

[17] 長岡一夫（1982），「ホイヘンスの確率論について」，『科学史研究』No. 142，1982年.

[18] 野田又夫（1966），『デカルト』，岩波新書，1966年.

[19] Petry, M.J. (1985), *Spinoza’s Algebraic Calculation of the Rainbow and Calculation of Chance*, 1985, Dordrecht.

[20] 佐々木重夫（1955），『幾何入門』，岩波書店，1955年.

[21] Spinoza, B.de. (1972), *Reeckening van Kanssen*, in C. Gebhardt, ed., *Spinoza Opera*, im Auftrag der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Vol. IV, 1972.

[22] 吉田　忠（1989），「スピノザ『偶然の計算』について」，『北海学園大学経済論集』36巻３号，1989年.

[23] 吉田　忠（1999），「17世紀後半オランダにおける人口統計と確率論の交錯」，長屋・金子・上藤編著『統計と統計理論の社会的形成』，北大図書刊行会，1999年.

On C. Huygens' "On Reckoning at Games of Chance"

Tadashi YOSHIDA

Summary

J. Bernoulli reprinted C. Huygens' "On Reckoning at Games of Chance" in his "*Ars conjectendi*". Bernoulli gave a comment to Prop. 14, "Huygens had solved the problems synthetically on the basis of the hypotheses and proved Prop. until Prop. 13, but he solved Prop. 14 by working out simultaneous equations, namely analytically." First, the author cleared what hypotheses Huygens set and how he proved the problems synthetically. Secondly, Huygens' analytical method was compared with the analysis of Descartes. His analysis was considered to be the same with the method of solving the problems for construction in geometry, which looked for the sufficient conditions successively. In his "*Geometry*" he solved construction problems by the equation of known lines. But to get the solution of equations (even if simultaneous ones) is not to get sufficient conditions. The methods of analysis are concerned with looking for the variables of equations in the matter of question, and regarding the solutions of simultaneous equations as getting the value of a variable with the help of another one. In these process not only reasonable inference but also experience, intuition and image are necessary.

Key Words

C. Huygens, Value of Chance, Synthesis, Analysis